CAPÍTULO 6

DERIVADA DE FUNÇÃO REAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

6.1 Introdução

Neste capítulo, vamos generalizar, para funções reais de várias variáveis, o conceito de derivada de funções reais de uma variável que foi visto em Cálculo 1A.

Uma primeira idéia de definição de derivada de funções reais de várias variáveis, que é bem natural que venha em nossa mente, até pela aula passada, é utilizar as derivadas parciais. Isto é, diríamos que uma função é derivável em um ponto se ela possuísse todas as derivadas parciais neste ponto. Entretanto, também é natural, nesta generalização do conceito de derivada, que queiramos preservar as propriedades importantes que conhecemos de derivada de função da reta na reta. Sendo assim, observamos que o conceito de derivada parcial não serve para ser a generalização de derivada procurada, por um motivo muito simples: uma das propriedades mais importantes da derivada, que é o fato de diferenciabilidade implicar em continuidade, não é verdade em se tratando de derivadas parciais. De fato, lembre-se, da aula anterior, que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

possui todas as derivadas parciais na origem (Exemplo 5.2.4), muito embora, tenhamos visto na aula de continuidade, que esta função não é contínua na origem (Exemplo 4.3.1). De fato, considerando a curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t,t)$, $t \geq 0$, e calculando, separadamente, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Desta forma, como os limites ao longo de dois caminhos diferentes de aproximação à origem são distintos, temos que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, de modo que f não é contínua na origem.

Observe que seria realmente um desastre, algo sem sentido, ter uma generalização do conceito de derivada, onde diferenciabilidade não implicasse em continuidade.

Abortando a idéia das derivadas parciais, também é natural pensarmos, como uma segunda possibilidade, no limite

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(X_0+H)-f(X_0)}{H}.$$

Neste caso, nos deparamos de imediato com um problema: H é da forma $H = (h_1, ..., h_n)$, ou seja, tem dimensão n e portanto, a divisão acima não faz sentido. Pensamos então em contornar o problema, dividindo, não mais por H mas, por $||H||$. Pelo menos assim, o quociente passaria a fazer sentido. Então, vamos tentar generalizar o conceito de derivada utilizando o limite

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(X_0+H)-f(X_0)}{||H||}.$$

Vamos aplicá-lo à função $f(x,y) = x+y$, que é uma função polinomial e linear. Nossa intuição construída em Cálculo 1A, diz que uma função polinomial e, mais ainda, linear, com certeza será diferenciável se a generalização do conceito de derivada for uma generalização “decente”. Então, mãos à obra, vamos calcular este limite:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{x_0+h+y_0+k-x_0+y_0}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}.\end{aligned}$$

Opa! Problema! O limite acima não existe para nenhum $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, considerando a curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t,0)$, $t \leq 0$, e calculando, separadamente, $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_1}} \frac{h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \textit{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{-t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1.$$

Isto é inadmissível, abalaria as estruturas da terra se uma função linear pudesse ter a ousadia de não ser derivável. Vamos então abortar imediatamente esta idéia.

Partiremos então para explorar algum outro aspecto da definição de derivada, fora o limite, que, por algum infortúnio, tenha passado despercebido no curso de Cálculo 1A.

6.2 Retorno ao Conceito de Derivada de Função da Reta na Reta

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Então, temos que sua derivada $f'(x_0)$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Sabemos portanto, das propriedades de limite, que para h suficientemente pequeno,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Temos assim, que nas proximidades de x_0, i. e. para $x_0 + h$, onde h é suficientemente pequeno,

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Vamos definir uma função chamada *erro*, dependendo do quanto nos afastamos de x_0, i.e. dependente de h (e, intrinsicamente, de x_0) que irá transformar o sinal de aproximadamente igual em um sinal de igual. Isto é, vamos fazer

$$erro(h) \triangleq f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h,$$

de modo que,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + erro(h).$$

Observe que, assim definido,

$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0,$$

uma vez que f é uma função contínua. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} erro(h) &= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h \\
&= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) - \lim_{h\to 0} f(x_0) - \lim_{h\to 0} f'(x_0)\, h \\
&= f(x_0) - f(x_0) - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, como f é diferenciável em x_0, também segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(x_0) \\
&= f'(x_0) - f'(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que, se f é diferenciável em x_0, então, numa vizinhança de x_0, f pode ser escrita como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + erro(h),$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$

Vamos interpretar este resultado. Se $\lim_{h \to 0} \dfrac{erro(h)}{h} = 0$, isto significa que $erro(h)$, não só tende a zero quando h tende a zero, como tende a zero mais rápido do que h e, portanto, para h muito pequenininho, $erro(h)$ é insignificante com relação a h, ou melhor, desprezível com relação a h. Logo, em qualquer ponto $x = x_0 + h$, numa vizinhança de x_0, o valor da função em x pode ser bem aproximado por um polinômio do primeiro grau, i.e. uma função afim (linear + constante):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vamos agora tentar fazer o caminho inverso, i.e. vamos admitir que uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja bem aproximada numa vizinhança de x_0 ($x_0 \in I$(aberto) $\subseteq Dom(f)$) por um polinômio do primeiro grau, i.e. uma função afim (linear + constante) e, a partir disto, vamos ver o que é necessário e razoável que aconteça. Desta forma, traduzindo matematicamente esta informação, temos que para valores de x numa vizinhança de x_0,

$$f(x) \approx ax + b.$$

Ou melhor, para ficar bem claro que estamos em um ponto próximo a x_0, vamos escrever $x = x_0 + h$, com h representando esta pequena variação em torno de x_0, i.e.

$$f(x_0 + h) \approx a(x_0 + h) + b.$$

Em primeiro lugar, é natural que se aproximação for boa numa vizinhança de x_0, então ela deve ser ótima, ou melhor, exata, no próprio ponto x_0. Caso contrário, estaríamos começando mal. Sendo assim, fazendo $h = 0$ na equação anterior, temos que

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0.$$

Substituindo então, o valor de b encontrado acima, em nossa equação, temos que,

$$f(x_0 + h) \approx a(x_0 + h) + f(x_0) - ax_0 \Rightarrow f(x_0 + h) \approx f(x_0) + ah.$$

Vamos então definir uma função $erro$, dependente de h (e, intrinsicamente, de x_0) para poder transformar o sinal de aproximadamente igual em um sinal de igual. Desta forma, podemos escrever que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h),$$

onde $erro(h)$ é definido como

$$erro(h) \triangleq f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Mas, esta função *erro* não pode ficar "solta", ela tem que satisfazer certas propriedades para que a expressão "boa aproximação na vizinhança do ponto x_0" não se perca. Em primeiro lugar, quanto menor h, menor deveria ser $erro(h)$. Matematicamente, esta nossa condição pode ser expressa pedindo que

$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0.$$

Observe ainda, que pedir o limite acima, significa pedir que *erro* seja uma função contínua em zero, pois, conforme estabelecido antes, a aproximação deve ser exata em x_0, de modo que, fazendo $h = 0$ na equação de definição da função *erro*, segue que

$$f(x_0) = f(x_0) + erro(0) \Rightarrow erro(0) = 0,$$

o que leva a

$$\lim_{h\to 0} erro(h) = 0 = erro(0).$$

Mas, nossas exigências "razoáveis" sobre a função *erro* não terminam aqui. Observe ainda que, para h pequeno, exigir $erro(h)$ também pequeno, não é o suficiente pois, afinal de contas, queremos que o papel de aproximar o valor da função em x_0 seja desempenhado por $f(x_0) + ah$ e não por $erro(h)$ ou, melhor ainda, para separar quantidades diferentes, queremos que a alteração do valor da função quando se troca o ponto x_0 pelo ponto $x_0 + h$ (i.e. $f(x_0 + h) - f(x_0)$) não seja aproximado por $erro(h)$, mas sim, por ah. Imagine, por exemplo, que $f(x_0 + h) - f(x_0)$ fosse igual a 0,0500 e que, em um primeiro caso, ah fosse igual a 0,0250 e, em um segundo caso, que ah fosse igual a 0,0499. Qual aproximação você acha que seria realmente boa? A primeira, onde $erro(h) = 0,0250$, que é igual a própria aproximação, ou a segunda, onde $erro(h) = 0,0001$, que é bem menor do que a aproximação? Em outras palavras, queremos que para h muito pequenininho, $erro(h)$ seja insignificante ou desprezível em relação a h, ou melhor, que quando h tender a zero, que $erro(h)$ vá mais rápido para zero do que h. Matematicamente, podemos traduzir este nosso desejo exigindo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$

Portanto, chegamos a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h)$$

onde,

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$

Observe então, que para satisfazer estas condições impostas, temos que a derivada de f em x_0 existe e é igual a a. De fato,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah + erro(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a + \frac{erro(h)}{h} = \lim_{h\to 0} a + \lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} \\ &= a. \end{aligned}$$

Concluímos assim, que, se uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é bem aproximada numa vizinhança de x_0 por um polinômio do primeiro grau, então ela é derivável em x_0

e a constante a, que tem um papel super importante neste processo, é justamente $f'(x_0)$.

Desta forma, chegamos à conclusão que,

$$L(h) := f(x_0) + ah = f(x_0) + f'(x_0)h$$

é a melhor função afim que aproxima $f(x_0 + h)$ numa vizinhança de x_0, no sentido de que é a única função afim que aproxima $f(x_0+h)$ nesta vizinhança, com erro tendendo a zero mais rápido que h, quando $h \to 0$.

Resumindo então tudo o que vimos até agora, podemos concluir que possuir derivada em um ponto e possuir uma boa aproximação polinomial de primeiro grau numa vizinhança do ponto são de fato condições equivalentes. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 6.2.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se e somente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h),$$

onde,

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0.$$

Devido à condição de equivalência, que expressa necessidade e suficiência, esta propriedade pode ser utilizada como definição. Acrescentando-se ainda o fato de que

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{h} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{|h|} = 0, \text{(Verifique!)}$$

temos a seguinte definição de diferenciabilidade para função real de variável real.

DEFINIÇÃO 6.2.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $x_0 \in I(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + erro(h),$$

onde,

$$\lim_{h\to 0} \frac{erro(h)}{|h|} = 0.$$

A *derivada* de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é igual à a.

Temos então, na Definição 6.2.1, uma outra forma de definir derivada de função da reta na reta. Lembre-se que esta forma é, por tudo o que foi visto, equivalente àquela vista em Cálculo 1A, que estava apenas focada na existência do limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Inclusive, é justamente nesta nova forma de entender a derivada que temos o ponto crucial onde se fundamenta o conceito de derivada, o qual tornará possível uma verdadeira generalização deste conceito, não só para funções reais de várias variáveis, mas também para funções vetoriais de várias variáveis.

Vamos deixar mais claro qual é o ponto crucial. Ele está no fato de que, se f é diferenciável em x_0, então numa vizinhança de x_0, a diferença

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

é igual a

$$ah+erro(h),$$

onde

$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0.$$

Ou seja, a diferença

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

é aproximadamente

$$ah$$

que é uma função **linear** de h (agora é linear mesmo), onde a expressão "aproximadamente" é tornada precisa na exigência de que

$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{|h|}=0.$$

Observe ainda que, se a função f fosse ela própria um polinômio do primeiro grau, dado por $f(x)=ax+b$, então a diferença $f(x_0+h)-f(x_0)$ seria exatamente ah, com $erro(h)=0$. De fato, neste caso, teríamos que

$$f(x_0+h)-f(x_0) \quad = \quad a(x_0+h)+b-[ax_0+b]=0.$$

Por tudo o que foi visto acima e utilizando o fato de que, como função de h, a expressão ah pode ser representada pela função linear T, dada por $T(h)=ah$, podemos reescrever novamente o conceito de derivada de uma função real de variável real da forma que segue abaixo.

DEFINIÇÃO 6.2.2: A função $f: Dom(f)\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é *diferenciável* em $x_0\in I(\text{aberto})\subseteq Dom(f)$ se existe uma função linear $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0+h)=f(x_0)+T(h)+erro(h),$$

onde

$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0.$$

Representando a transformação linear $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $T(h)=ah$, $\forall h\in\mathbb{R}$, temos que a *derivada* de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é igual à a.

Vamos agora utilizar as idéias acima no processo de generalização do conceito de derivada.

6.3 Derivada de Funções Reais de Várias Variáveis

Antes de mais nada, lembre-se que, em Álgebra Linear, foi definido que uma função ou transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),$$

onde α e β são escalares e x e y pertencem a $\mathbb{R}^n$. Além disso, é sabido que uma transformação linear da reta na reta é bem representada por uma constante a, i.e.

$$T(h) = ah.$$

Agora, se formos pensar em funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, temos que atentar para o fato de que H é um ponto em $\mathbb{R}^n$ e que a transformação linear T que atuar nele, deverá levá-lo em $\mathbb{R}$, i.e. $T(H) \in \mathbb{R}$. Também é fato conhecido de Álgebra Linear que, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada de forma única por uma matriz $m \times n$. Sendo assim, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$. Observe ainda que uma matriz 1×1 é um escalar $a \in \mathbb{R}$, o que corrobora nossa afirmação anterior de que uma transformação linear da reta na reta é bem representada por uma constante a.

Para dar sequência ao raciocínio, observe ainda que $|h|$ representa a distância entre o ponto x_0 e o ponto $x_0 + h$ na vizinhança de x_0.

Vamos então adaptar a Definição 6.2.1, de derivada de funções da reta na reta, às funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, tendo em mente que o ponto crucial é que, a diferença entre o valor da função no ponto $X_0 + H$, numa vizinhança do ponto X_0, e o valor da função no ponto X_0, pode ser bem aproximada por uma transformação linear aplicada na diferença entre os pontos, dada por H, num sentido bem preciso, que consiste no erro tender a zero mais rápido do que a distância entre os pontos $X_0 + H$ e X_0, quando $X_0 + H$ se aproxima de X_0.

DEFINIÇÃO 6.3.1: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + T(H) + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

A transformação linear T é denominada *diferencial* de f em X_0.

Conforme mencionado anteriormente, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é representada de forma única por uma matriz $n \times 1$. Desta forma, se a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a qual a definição de derivada se refere, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$. Esta matriz que representa T é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$. Abaixo daremos uma definição equivalente à Definição 6.3.1, utilizando a matriz no lugar da transformação linear.

DEFINIÇÃO 6.3.2: A função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + M.H + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0,$$

onde (.) é o produto matricial.

A matriz $M \in \mathcal{M}_{1\times n}$ é chamada de *derivada de f em X_0* e é denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$.

Abaixo vamos definir diferenciabilidade em um conjunto aberto.

DEFINIÇÃO 6.3.3: Se f é diferenciável em todos os pontos do aberto $A \subseteq Dom(f)$, dizemos que f é *diferenciável em A*.

Conforme veremos, nossa primeira dificuldade encontrada na hora de definir derivada, foi então superada, pois correspondendo as nossas expectativas, diferenciabilidade continua implicando em continuidade. O mundo permanece em ordem.

TEOREMA 6.3.1: Se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A$(aberto) $\subseteq Dom(f)$, então f é contínua em X_0.

Demonstração: Se f é derivável em X_0, então temos que existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + T(H) + erro(H), \tag{1}$$

com

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

Lembre-se que mostrar que f é contínua em X_0 corresponde a demonstrar que

$$\lim_{||H||\to 0} f(X_0+H) = f(X_0)$$

ou, de forma equivalente, que

$$\lim_{||H||\to 0} f(X_0+H) - f(X_0) = 0.$$

Sendo assim, como f é diferenciável em X_0, pela igualdade (1), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{||H||\to 0} f(X_0+H) - f(X_0) &= \lim_{||H||\to 0} T(H) + erro(H) \\
&= \lim_{||H||\to 0} T(H) + \frac{erro(H)}{||H||}||H|| \\
&\overset{*}{=} \lim_{||H||\to 0} T(H) + \lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} \lim_{||H||\to 0} ||H|| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ se deve a existência dos limites de todas as funções envolvidas e a igualdade $\lim_{||H||\to 0} T(H) = 0$ se deve ao fato de T ser uma transformação linear. Concluímos portanto, que f é contínua em X_0.

$\square$

De acordo com o teorema acima, temos que, se f não é contínua em X_0, então f também não é diferenciável em X_0.

Mais tarde, com mais informações, se quisermos, poderemos comprovar, utilizando a definição de derivada, que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, de fato, não é diferenciável na origem. Entretanto, como sabemos que ela não é contínua na origem, de acordo com o teorema acima, já podemos concluir que ela não é diferenciável.

Vamos agora utilizar este teorema para resolver o exemplo abaixo.

Exemplo 6.3.1: Verifique se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável na origem.

Solução: Lembre-se que foi verificado, na aula de continuidade, que f não é contínua em $(0,0)$ (Exemplo 4.2.6). De fato, considerando a curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) =$

$(t,0)$, $t \geq 0$, e a curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (0,t)$, $t \geq 0$, e calculando, separadamente, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ao longo das curvas C_1 e C_2, temos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2-0}{t^2+0} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1,$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} = \lim_{t\to 0^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{0-t^2}{0+t^2} = \lim_{t\to 0^+} -1 = -1.$$

Como os limites ao longo de dois caminhos diferentes de aproximação à origem são distintos, temos que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, de modo que f não é contínua em $(0,0)$. Sendo assim, pelo Teorema 6.2.1 acima, temos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

♡

Vamos agora confirmar a superação da nossa segunda dificuldade. Vamos "testemunhar" que a função $f(x,y) = x+y$ é diferenciável, conforme era de se esperar, já que se trata de uma função linear. Aliás, mais tarde falaremos especificamente de funções lineares. Para resolver o próximo exemplo, observe que, particularmente para funções reais de duas variáveis reais, temos que $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(x_0,y_0) \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f((x_0,y_0)+(h,k)) = f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + T(h,k) + erro(h,k),$$

onde

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

ou ainda, se existe uma matriz $(a \ \ b) \in \mathcal{M}_{1\times n}$, tal que

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + (a \ \ b)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + erro(h,k) \\ &= f(x_0,y_0) + ah + bk + erro(h,k), \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Exemplo 6.3.2: Dado $f(x,y) = x+y$, mostre que a derivada de f é dada por $f'(x,y) = (1 \quad 1)$.

Solução: Para isto, devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} erro(h,k) &= f(x+h,y+k) - f(x,y) - (1\ \ 1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= x+h+y+k-x-y-h-k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Temos então, que

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{0}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe que $erro(h,k)$ é identicamente nulo, pois f é uma transformação linear, a qual é representada, na base canônica de $\mathbb{R}^2$ ($e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$), pela matriz $(1\ \ 1)$, i.e.

$$f(x,y) = (1\ \ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, é natural que sua derivada seja ela própria, pois a transformação linear que melhor aproxima uma transformação linear é ela mesma.

♡

Exemplo 6.3.3: Dado $f(x,y) = x^2y$, mostre que a derivada de f é dada por $f'(x,y) = (2xy \quad x^2)$.

Solução: De acordo com a definição, devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k)||\to 0} \frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} erro(h,k) &= f(x+h,y+k) - f(x,y) - (2xy\ \ x^2)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= (x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k \\ &= x^2y + 2xyh + h^2y + x^2k + 2xhk + h^2k - x^2y - 2xyh - x^2k \\ &= h^2y + 2xhk + h^2k. \end{aligned}$$

Temos então, que

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2y+2xhk+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} yh\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + h^2\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + 2xh\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0, \end{aligned}$$

pois os três limites são do tipo produto de função limitada $\left(-1 \leq \dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1\right.$ e $\left.-1 \leq \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1\right)$ por função que tende a zero quando $(h,k) \to (0,0)$ (yh, h^2 e

$2xh$).

♡

Observe que, nos exemplos anteriores, nos foi pedido apenas para comprovar que uma transformação linear dada era de fato a derivada da função. Isto é, apenas tivemos que confirmar que

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

E se nos for pedido para achar a derivada, caso ela exista? O que vamos fazer? Existe algum candidato? Note que no Exemplo 6.2.3, a derivada $f'(x,y)$ é dada por

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Isto não foi coincidência. Conforme veremos a seguir, a matriz associada às bases canônicas de qualquer transformação T que satisfaz a condição dada na definição de diferenciabilidade, pode ser calculada em termos das derivadas parciais de f. Com isto, temos que T é *univocamente* determinada por f em cada ponto X_0 pertencente ao interior de seu domínio. Portanto, podemos falar de *a* diferencial de f em X_0.

Para comprovar o que foi dito acima, considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é diferenciável em X_0, então existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{f(X_0+H) - f(X_0) - T(H)}{||H||} = 0. \tag{2}$$

Como X_0 é um ponto no interior do domínio de f, temos que, para todo $Y \in \mathbb{R}^2$, se t é suficientemente pequeno, então $X = X_0 + tY \in Dom(f)$. Desta forma, vamos fazer $H = tY$ no limite (2). Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+tY) - f(X_0) - T(tY)}{||tY||} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+tY) - f(X_0) - tT(Y)}{||tY||} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \left|\left| \frac{f(X_0+tY) - f(X_0) - tT(Y)}{tY} \right|\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{||Y||} \lim_{t\to 0} \left|\left| \frac{f(X_0+tY) - f(X_0) - tT(Y)}{t} \right|\right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+tY) - f(X_0) - tT(Y)}{t} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+tY) - f(X_0)}{t} = T(Y). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Fazendo então, $Y = e_j$, $j = 1, 2$, em (3), onde e_j são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$, temos que

$$T(e_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(X_0+te_j) - f(X_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0). \tag{4}$$

Concluímos portanto, que

$$f'(X_0) = d_{X_0}f = M = (m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \end{array}\right).$$

Observe que, no que foi feito acima, o fato de n ser igual a dois não foi usado. Desta forma, todo o processo anterior é válido para um n natural arbitrário. De um modo geral, a derivada de uma função real de várias variáveis é representada, nas bases canônicas, por uma matriz formada pelas suas derivadas parciais. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 6.3.2: Seja

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Se f é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$, então f admite todas as derivadas parciais em X_0 e a derivada da f em X_0, denotada por $f'(X_0)$ ou $d_{X_0}f$, é dada por

$$f'(X_0) = d_{X_0}f = M = (m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)\right) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{array}\right).$$

Observação 6.3.1: A derivada de f em X_0 também é chamada de *Matriz Jacobiana de f em X_0*.

Como consequência do teorema acima, temos portanto o corolário abaixo, que utilizaremos para determinar se uma função é ou não diferenciável em um ponto.

COROLÁRIO 6.3.1: $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$ se e somente se

(a) f admite todas as derivadas parciais em X_0, i.e. f admite a matriz M das derivadas parciais em X_0, $(m_{1j}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right)$;

(b)
$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{||H||\to 0} \dfrac{erro(H)}{||H||} & = & \lim\limits_{||H||\to 0} \dfrac{f(X_0+H) - f(X_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right).H}{||H||} \\ & = & \lim\limits_{||H||\to 0} \dfrac{f(X_0+H) - f(X_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)h_1 - ... - \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)h_n}{||H||} \\ & = & 0, \end{array}$$

onde $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\right) = \left(\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{array}\right)$, $H = \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{array}\right)$ e o produto (.) é um produto entre matrizes.

Vamos agora voltar aos exemplos antigos e, de posse das informações previamente obtidas, verificar o que se pode dizer a respeito da diferenciabilidade destas funções.

6.4 Exemplos

Exemplo 6.4.1: Utilize o Corolário 6.3.1para verificar que a função abaixo não é diferenciável em (0,0).

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução:
Conforme já tínhamos visto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0.$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{array}\right) = (0 \;\; 0)$.

Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0} \dfrac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

$$\begin{aligned} erro(h,k) &= f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0 \;\; 0)\left(\begin{array}{c} h \\ k \end{array}\right) \\ &= \frac{hk}{h^2+k^2}. \end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{hk}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Observe que o limite acima não existe, pois ao longo da curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t) = (t,t)$, $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{(2t^2)^{3/2}} = \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2^{3/2}|t|^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{2^{3/2}t^3} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2^{3/2}t} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Sendo assim, como não existe $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, temos que a função f não é diferenciável na origem.

♡

Exemplo 6.4.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{y^2}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ e $0 < \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Desta forma, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Sendo assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{y^2}{x^2+y^2} \\
&= 0 \\
&= f(0,0),
\end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k}{k} = 1.$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{array}\right) = (0\ \ 1)$.

c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0}\frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

$$\begin{aligned} erro(h,k) &= f(0+h,0+k)-f(0,0)-(0\ \ 1)\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\\ &= \frac{k^3}{h^2+k^2}-k\\ &= \frac{k^3-kh^2-k^3}{h^2+k^2}\\ &= \frac{-kh^2}{h^2+k^2}.\end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{-kh^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

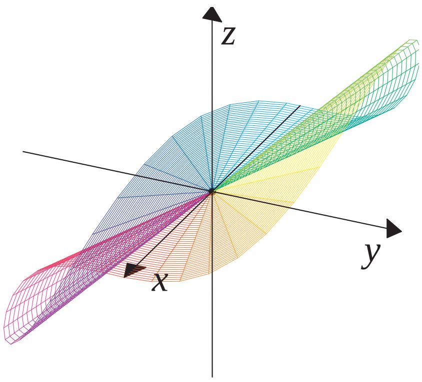
Observe que o limite acima não existe, pois ao longo da curva C_1, parametrizada por $\gamma_1(t)=(t,t)$, $t\geq 0$, temos que

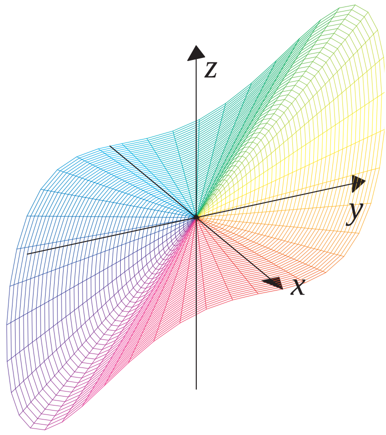
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ ao\ longo\ de\ C_1}}\frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{-t^3}{(2t^2)^{3/2}} =\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{-t^3}{2^{3/2}|t|^3}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{-t^3}{2^{3/2}t^3}\\ &= -\frac{1}{2^{3/2}},\end{aligned}$$

enquanto que, ao longo da curva C_2, parametrizada por $\gamma_2(t) = (t, t)$, $t \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} \frac{-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^3}{2^{3/2}|t|^3} \\ &= \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^3}{-2^{3/2}t^3} \\ &= \frac{1}{2^{3/2}}.\end{aligned}$$

Sendo assim, a função f não é diferenciável na origem. Inclusive, observe que bastaríamos ter calculado o limite acima ao longo de C_1 para concluir que f não é diferenciável na origem. De fato, como este limite é igual a $-\dfrac{1}{2^{3/2}}$, teríamos que, se o limite existisse, ele seria igual a $-\dfrac{1}{2^{3/2}} \neq 0$. Abaixo temos o esboço do gráfico de f sob dois ângulos diferentes.





♡

Exemplo 6.4.3: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \frac{y^2}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$ e $0 < \dfrac{y^2}{x^2+y^2} < 1$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Desta forma, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Sendo assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &= 0 \\ &= f(0,0), \end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{k} = \lim_{k\to 0} k = 0.$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{array}\right) = (0 \;\; 0)$.

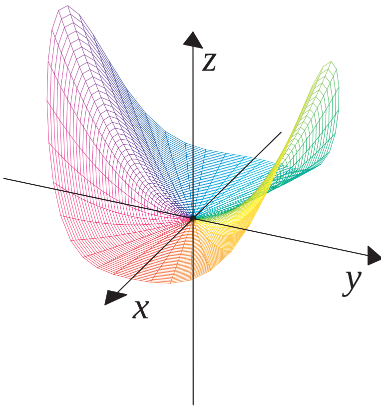
c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0} \dfrac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

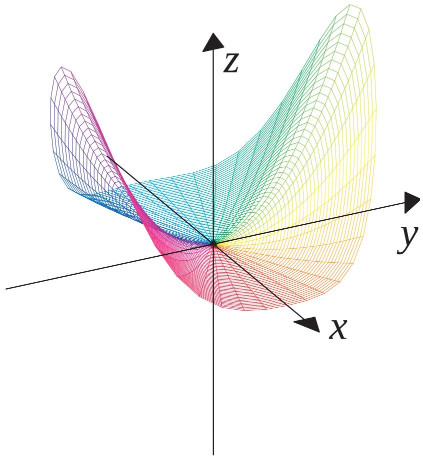
$$\begin{aligned} erro(h,k) &= f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0 \;\; 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \frac{k^4}{h^2+k^2}. \end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{k^4}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} |k| \frac{|k|^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} |k| \left(\frac{k^2}{h^2+k^2}\right)^{3/2} = 0, \end{aligned}$$

pois o limite acima é o limite do produto de uma função limitada $\left(0 < \dfrac{k^2}{h^2+k^2} < 1\right)$ por outra que tende a zero quando $(h,k) \to (0,0)$ (a função $|k|$). Sendo assim, concluímos que f é diferenciável na origem. Abaixo temos o esboço do gráfico de f sob dois ângulos diferentes.





♡

Exemplo 6.4.4: Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua na origem.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais na origem.
(c) Verifique se f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Note que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\text{ sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0=f(0,0).$$

De fato, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2=0$ e $-1<\text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)<1$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y)\to(0,0)$. Desta forma, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Sendo assim, concluímos que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais na origem devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\text{ sen}\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} h\text{ sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)=0,\end{aligned}$$

pois $\lim_{(h,k)\to(0,0)} h = 0$ e $-1 \leq \text{ sen}\left(\dfrac{1}{h^2}\right) \leq 1$, de modo que podemos aplicar o Teorema do Anulamento. Analogamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \text{ sen}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k} \\
&= \lim_{k\to 0} k \text{ sen}\left(\frac{1}{k^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f na origem existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{array}\right) = (0 \;\; 0)$.

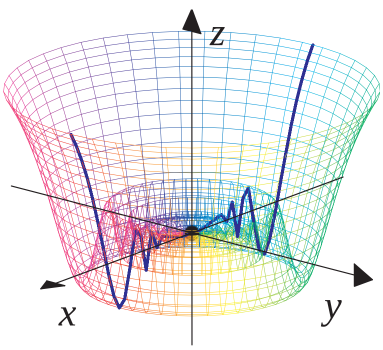
c) Devemos calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0} \dfrac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

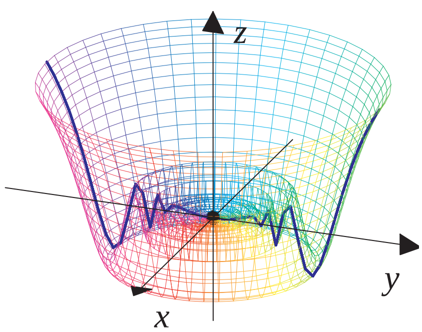
$$\begin{aligned}
erro(h,k) &= f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0 \;\; 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= (h^2+k^2) \text{ sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right).
\end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2) \text{ sen}\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} \text{ sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

pois $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$ e $-1 \leq \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \leq 1$, de modo que podemos aplicar o Teorema do Anulamento. Sendo assim, concluímos que f é diferenciável na origem. Abaixo temos o esboço do gráfico de f.





♡

6.5 Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Temos a seguir um teorema que pode ajudar a determinar se uma função é derivável em um ponto, sem ter que passar pela análise da função *erro*. Além disso, ele será verdadeiramente útil quando quisermos determinar se uma função é derivável em um conjunto aberto contido no seu domínio. Pois, com o que temos até agora, para verificar se f é derivável em um ponto (x, y) arbitrário pertencente ao interior de seu domínio, devemos calcular as derivadas parciais em (x, y) arbitrário e então calcular

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \lim_{||H||\to 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

o que pode ser bastante complexo. Apesar de nos exemplos estarmos nos restringindo a funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, o teorema será enunciado para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

TEOREMA 6.5.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f possui todas as derivadas parciais em A e elas são contínuas em X_0, então f diferenciável em X_0.

Exemplo 6.5.1: Mostre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

Solução: Já mostramos no Exemplo 6.4.2 que f é diferenciável na origem. Vamos agora mostrar que f também é diferenciável em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$. Portanto, as derivadas parciais de f em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ são funções racionais, cujos denominadores não se anulam neste conjunto. Consequentemente, elas são contínuas, pois toda função racional é contínua em seu domínio. Agora, basta aplicar o Teorema 6.5.1 para concluir que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Desta forma, mostramos que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

$\heartsuit$

Observe bem que o teorema não diz nada se f falhar em ter todas as derivadas parciais contínuas em X_0. Ele **<u>não</u>** diz que a derivada então não irá existir. Ele se abstém de comentários e, neste caso, você não vai escapar de ter que calcular o limite que tentou evitar. Confira o exemplo a seguir.

Exemplo 6.5.1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right); & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
(b) Mostre que as derivadas parciais de f não são contínuas na origem e compare com a conclusão obtida na resolução do Exemplo 6.4.3, de que f é diferenciável na origem.

Solução:
a) Já mostramos, no Exemplo 6.4.3, que f é diferenciável na origem. Vamos agora mostrar que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

se $(x,y) \neq (0,0)$. Esta função é formada pelo produto, soma e composição de funções contínuas em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Por analogia, tudo se passa da mesma forma para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sendo assim, a diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ é conseqüência do Teorema 6.5.1. Concluímos portanto, que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.

b) Para mostrar que as derivadas parciais de f não são contínuas na origem, observe que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. De fato, enquanto que por um lado temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0,$$

por ser o limite do produto de uma função limitada $\left(-1 \leq\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \leq 1\right)$ por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$ ($\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0$), por outro lado temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \nexists.$$

Para ver que este último limite não existe, observe que, como cosseno é uma função periódica, se escolhermos uma curva C, parametrizada por $\gamma(t) = (t,0)$, $t \geq 0$, ficamos com

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \textit{ao longo de } C}} \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Note agora que, toda vez que t assumir valores iguais a $\sqrt{\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}}$, para algum n natural, teremos que

$$\frac{2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0.$$

Por outro lado, toda vez que t assumir valores da iguais a $\sqrt{\dfrac{1}{2n\pi}}$, para algum n natural, teremos que

$$\frac{2}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) = \sqrt{2n\pi} \to \infty,$$

quando $n \to \infty$. Desta forma, quando $t \to 0^+$, temos que o quociente acima alterna valores muito grandes com nulos. Sendo assim, não existe $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{2}{t}\cos\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, o que significa que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$. O mesmo acontece com $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Portanto, as derivadas parciais de f não são contínuas na origem. Entretanto, conforme visto no Exemplo 6.4.3, f é diferenciável na origem.

Este exemplo mostra que a continuidade das derivadas parciais é uma condição realmente só SUFICIENTE para diferenciabilidade e não é, de forma alguma, necessária.

♡

Diante da importância que acabamos de ver de uma função possuir todas as derivadas parciais contínuas, vamos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 6.5.1: Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Se existe um conjunto aberto $A \subseteq Dom(f)$ tal que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, existem para todo $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ e elas são contínuas em $X_0 \in A$, dizemos que f é de classe C^1 em X_0. Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, existem e são contínuas para todo $X \in A$, dizemos que F é de classe C^1 em A.

Utilizando a Definição 6.5.1 no Teorema 6.5.1, temos a seguinte reformulação do teorema.

TEOREMA 6.5.1 (Reformulado): Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é de classe C^1 em X_0, então f é diferenciável em X_0.

6.6 Plano Tangente

De acordo com a definição equivalente de diferenciabilidade para funções da reta na reta que apresentamos, temos que $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x_0 \in I(\text{aberto}) \in Dom(f)$ e sua derivada é $f'(x_0)$ se e só se, numa vizinhança de x_0, tivermos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + erro(h), \tag{5}$$

onde,
$$\lim_{h\to 0}\frac{erro(h)}{|h|}=0.$$
Desta forma, ao fazermos $x = x_0 + h$ na equação (5), ficamos com

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + erro(x - x_0),$$

onde,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{erro(x-x_0)}{|x-x_0|}=0.$$
Portanto, se f é diferenciável em x_0, então, numa vizinhança de x_0, temos que $f(x)$ pode ser bem aproximado por

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Desta forma, se definirmos

$$L(x) \triangleq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que L é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança de x_0, no sentido de que é a única função afim que aproxima f nesta vizinhança, com erro dado por $erro(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, onde este erro tende a zero mais rápido do que $|x - x_0|$, quando $x \to x_0$. Agora, lembre-se que foi visto, em Cálculo 1A, que se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0, então o gráfico de f possui reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ e a equação desta reta é dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Observe portanto, que foi exatamente o gráfico da melhor aproximação afim da função numa vizinhança do ponto x_0, que chamamos de reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, quando f é diferenciável em x_0.

Da mesma forma, uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em (x_0, y_0), se e só se, numa vizinhança de (x_0, y_0), tivermos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + erro(h, k) \tag{6}$$

onde,
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{||(h,k)||}=0.$$
Sendo assim, ao fazermos $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ na equação (6), ficamos com

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + erro(x - x_0, y - y_0),$$

onde,
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{erro(x-x_0,y-y_0)}{||(x-x_0,y-y_0)||}=0.$$

Portanto, se f é diferenciável em (x_0, y_0), então numa vizinhança de (x_0, y_0), temos que $f(x, y)$ pode ser bem aproximado por

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Desta forma, se definirmos

$$L(x,y) \triangleq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

temos que L é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança de (x_0, y_0), no sentido de que é a única função afim que aproxima f nesta vizinhança, com erro dado por $erro(x-x_0, y-y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$, onde este erro tende a zero mais rápido que $||(x-x_0, y-y_0)||$, quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Portanto, seguindo o exemplo do que foi feito em Cálculo 1 é exatamente o gráfico função afim que melhor aproxima a função f numa vizinhança do ponto (x_0, y_0), que vamos chamar de *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Claro que só quando f for diferenciável em (x_0, y_0). Confira a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 6.6.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. O plano

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

denomina-se *plano tangente* ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observação 6.6.1: Lembre-se que se a curva C_{10} é a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $y = y_0$, vimos que a reta tangente à curva C_{10} no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, na forma cartesiana, é dada pelas equações

$$\begin{cases} z - f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) \\ y = y_0 \end{cases}.$$

da mesma forma, se a curva C_{20} é a curva dada pela interseção do gráfico de f com o plano $x = x_0$, vimos que a reta tangente à curva C_{20} no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, na forma cartesiana, é dada pelas equações

$$\begin{cases} z - f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) \\ x = x_0 \end{cases}.$$

Observe que as retas tangentes às curvas C_{10} e C_{20}, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, estão contidas no plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Podemos reescrever a equação do plano tangente definido acima, na forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Sendo assim, fica evidente que o vetor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

é perpendicular ao plano tangente, de modo que podemos definir *reta normal* ao gráfico da função f. Confira a definição abaixo.

DEFINIÇÃO 6.6.2: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. A reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta normal* ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observação 6.6.2: Observe que o vetor perpendicular ao plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dado por $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$, é igual ao produto vetorial dos vetores $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ e $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$, que são os vetores tangentes às curvas C_{20} e C_{10}, que são as curvas dadas, respectivamente, pela interseção do gráfico de f com os planos $x = x_0$ e $y = y_0$.

Vamos fazer um exemplo.

Exemplo 6.6.1: Seja $f(x, y) = \dfrac{x^2 y + 2x}{4}$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função f no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{32}\right)$.

Solução: Em primeiro lugar, observe que f é uma função polinomial. Portanto, f possui todas as derivadas parciais e elas são todas contínuas em $\mathbb{R}^2$. Desta forma, pelo Teorema 6.5.1, f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$. Deste modo, o gráfico de f possui plano tangente e reta normal em todos os pontos de seu gráfico e, em particular, no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{32}\right)$. Neste ponto, o plano tangente e reta normal ao gráfico de f, são dados, respectivamente, pelas equações

$$z = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

e

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),-1\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy+2}{4}=\frac{xy+1}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2}{4},\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{8}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Sendo assim, as equações do plano tangente e da reta normal são dadas, respectivamente, por

$$z=\frac{9}{32}+\frac{5}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

e

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right)+\lambda\left(\frac{5}{8},\frac{1}{16},-1\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Abaixo temos os desenhos relativos a este exemplo. Observe que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right)$ contém as retas tangentes às curvas $C_1:\gamma_1(t)=\left(t,\frac{1}{2},f\left(t,\frac{1}{2}\right)\right)$, $t\in\mathbb{R}$ e $C_2:\gamma_2(t)=\left(\frac{1}{2},t,f\left(\frac{1}{2},t\right)\right)$, $t\in\mathbb{R}$. De fato, conforme observado no capítulo anterior, o coeficiente angular da reta tangente à curva C_1 dada pela interseção do plano $y=\frac{1}{2}$ com o gráfico de f, no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right)$, é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

e, neste caso, temos que a reta tangente à curva C_1 no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right)$ é dada pelas equações

$$\begin{cases} z-\dfrac{9}{32}=\dfrac{5}{8}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

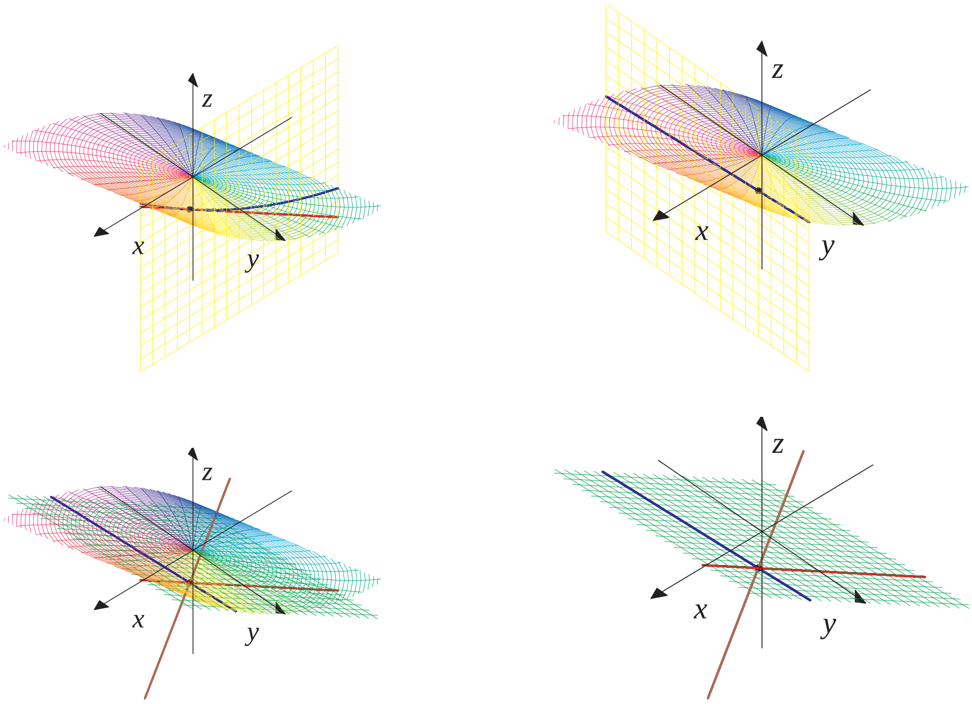
Da mesma forma, o coeficiente angular da reta tangente à curva C_2 dada pela interseção do plano $x=\frac{1}{2}$ com o gráfico de f, no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{9}{32}\right)$, é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$

e, neste caso, temos que a reta tangente à curva C_2 no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{32}\right)$ é dada pelas equações

$$\begin{cases} z - \dfrac{9}{32} = \dfrac{1}{16}\left(y - \dfrac{1}{2}\right) \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases} .$$

Abaixo temos o esboço do gráfico com o plano e as retas tangentes.



$\heartsuit$

Exemplo 6.6.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Mostre que o gráfico de f não admite plano tangente em $(0, 0, f(0, 0))$.

Solução: No Exemplo 6.4.1 verificamos que f não é diferenciável em (0,0), de modo que f não possui plano tangente em $(0, 0, f(0, 0))$.

$\heartsuit$

Vimos na Observação 6.6.1 o plano tangente ao gráfico de uma função f, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, contém as retas tangentes às curvas C_{20} e C_{10}, neste ponto, que são as curvas dadas, respectivamente, pela interseção do gráfico de f com os planos $x = x_0$ e $y = y_0$. É natural se pensar que o plano tangente ao gráfico de uma função f, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, contenha as retas tangentes, neste ponto, às curvas diferenciáveis contidas no gráfico de f, que contém o ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. De fato, mais tarde, após termos aprendido regra da cadeia, provaremos este resultado, que está enunciado abaixo.

TEOREMA 6.6.1: Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Considere uma curva C inteiramente contida no gráfico de f, onde C é parametrizada pela função γ, e γ é tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, γ é diferenciável em t_0 e $\gamma'(t_0) \neq 0$. Então, a reta tangente a C, no ponto $\gamma(t_0)$, está contida no plano tangente ao gráfico de f no ponto $\gamma(t_0)$.

Observe que o plano tangente, bem como a reta normal, ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_,y_0))$, só foram definidos no caso de f ser diferenciável em (x_0, y_0). Se f não for diferenciável em (x_0, y_0), mas mesmo assim possuir todas as derivadas parciais neste ponto, ainda é possível escrever a equação

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Entretanto, este plano **não** será plano tangente ao gráfico da função. Observe que o conceito de plano tangente envolve uma noção de aproximação que só está presente em funções diferenciáveis. Para entender melhor esta observação, vamos voltar ao Exemplo 6.6.2 e utilizar o Teorema 6.6.1. Confira a observação abaixo.

Observação 6.6.3: Para assimilar melhor que se f não é diferenciável em (x_0, y_0), muito embora exista o plano

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ele não carrega em si nenhuma propriedade de tangência, vamos considerar Exemplo 6.6.1, visto anteriormente. Vimos, neste caso, que f não é diferenciável em (0,0), de modo que o gráfico de f não possui plano tangente no ponto $(0, 0, f(0, 0))$. Entretanto, as derivadas parciais de f na origem são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 1, \end{aligned}$$

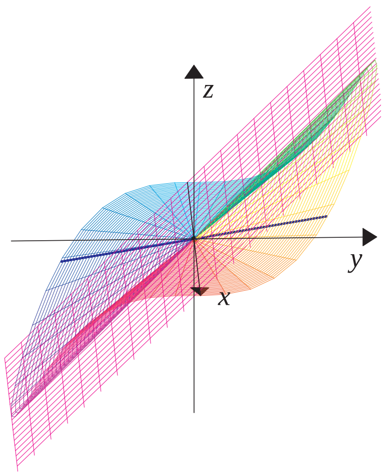
de modo que, podemos escrever a equação do plano

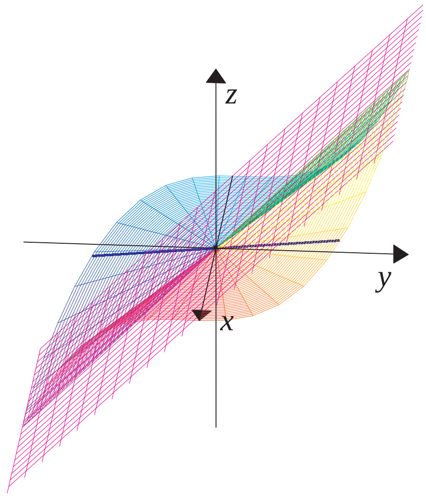
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

no caso em que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, resultando na equação $z = y$. Agora, considere a curva parametrizada pela função γ dada por $\gamma(t) = (t, t, \frac{t}{2})$, $t \in \mathbb{R}$. É fácil ver que esta curva está contida no gráfico de f, uma vez que $f(t,t) = \dfrac{t}{2}$. Além disso, a função γ é diferenciável e $\gamma(0) = (0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$. Entretanto, observe que a reta

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,1,\frac{1}{2}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que é a reta tangente a γ, no ponto $(0,0,0)$, não está contida no plano $z = y$. Desta forma, utilizando o Teorema 6.6.1, concluímos de uma forma mais visual, que realmente não é possível que o plano $z = y$ seja o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0,0,f(0,0))$.





♡

6.7 Aproximação Linear

Conforme vimos na seção anterior, se $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$, temos que

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

é função afim que melhor aproxima f numa vizinhança do ponto (x_0,y_0). Desta forma, se f é diferenciável em (x_0,y_0), podemos dizer que, para (x,y) numa vizinhança suficientemente próxima de (x_0,y_0), temos que $f(x,y)$ é bem aproximado por $L(x,y)$, ou seja, para (x,y) suficientemente próximo de (x_0,y_0), segue que

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

ou, de forma equivalente, definindo $h \triangleq x - x_0$ e $k \triangleq y - y_0$, temos que

$$f(x_0+h, y_0+k) \approx L(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k.$$

Desta forma, se f é uma função diferenciável em um ponto (x_0, y_0), podemos agora obter uma boa aproximação linear do valor de $f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$. Observe que, diferentemente da aproximação que obtivemos quando vimos derivadas parciais (Seção 6.4), agora podemos alterar ligeiramente os valores das duas variáveis ao mesmo tempo.

Exemplo 6.7.1: O volume V de um cilindro circular reto é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio do cilindro e h é sua altura. Determine uma boa aproximação de primeiro grau para o volume do cilindro quando o raio é 4,001 e a altura é 5,998.

Solução: Como V é uma função polinomial, temos que V é diferenciável para todo $(r, h) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, a derivada de V é dada por

$$DV(r,h) = V'(r,h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r}(r,h) & \frac{\partial V}{\partial h}(r,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi r h & \pi r^2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$DV(4,6) = V'(4,6) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r}(4,6) & \frac{\partial V}{\partial h}(4,6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48\pi & 16\pi \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$V(4 + 0,001\,,\, 6 - 0,002) \approx L(4 + 0,001\,,\, 6 - 0,002) = V(4,6) + V'(4,6) \cdot \begin{pmatrix} 0,001 \\ -0,002 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(4 + 0,001\,,\, 6 - 0,002) &\approx 96\pi + \begin{pmatrix} 48\pi & 16\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,001 \\ -0,002 \end{pmatrix} \\ &\approx 96\pi + 0,048\pi - 0,032\pi \\ &\approx 96,016\pi. \end{aligned}$$

♡

Observação 6.7.1: O procedimento realizado acima para uma função real de duas variáveis reais pode ser estendido de forma natural para uma função real de várias variáveis reais. Isto é, considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

e seja $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(f)$. Se f é diferenciável em X_0, temos que temos que

$$L(X) \triangleq f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

é a função afim que melhor aproxima f numa vizinhança do ponto X_0. Desta forma, se f é diferenciável em X_0, podemos dizer que, para X suficientemente próximo de X_0, temos que $f(X)$ é bem aproximado por $L(X)$, ou seja para X suficientemente próximo de X_0, segue que

$$f(X) \approx L(X) = f(X_0) + f'(X_0) \cdot (X - X_0),$$

onde $(\cdot)$ é o produto matricial, ou, de forma equivalente, definindo $H \triangleq X - X_0$, temos que

$$f(X_0 + H) \approx L(X_0 + H) = f(X_0) + f'(X_0) \cdot H.$$

6.8 Exercícios

Exemplo 6.8.1: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua no ponto $(0,1)$.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais no ponto $(0,1)$.
(c) Verifique se f é diferenciável no ponto $(0,1)$.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2 \frac{(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Observe que

$$0 \leq \frac{(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} \leq \frac{3(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} \leq \frac{x^4 + 3(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} = 1.$$

Portanto, $\dfrac{(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2}$ é uma função limitada. Desta forma, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,1)$. Sendo assim, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Concluímos portanto, que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \frac{(y-1)^2}{x^4 + 3(y-1)^2} \\ &= 0 \\ &= f(0,1), \end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,1)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais no ponto $(0,1)$ devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,1+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f o ponto $(0,1)$ existe e é igual a $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,1)\right) = \left(\begin{array}{cc}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)\end{array}\right) = (0\ \ 0).$

c) Devemos agora calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0}\dfrac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

$$\begin{aligned}erro(h,k) &= f(0+h,1+k)-f(0,1)-(0\ \ 0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\ &= \frac{h^2k^2}{h^4+3k^2}.\end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^2k^2}{h^4+3k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^4+3k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} h\,\frac{k^2}{(h^4+3k^2)}\,\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

De fato, para verificar que $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, observe que

$$0 \le \frac{k^2}{(h^4+3k^2)} \le \frac{3k^2}{(h^4+3k^2)} \le \frac{h^4+3k^2}{(h^4+3k^2)} = 1$$

e

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\le \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 1.\end{aligned}$$

Portanto, verificamos que $\dfrac{k^2}{(h^4+3k^2)}$ e $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são funções limitadas. Desta forma, como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} h = 0$, o limite acima é o limite do produto de funções limitadas por outra que tende a zero quando $(h,k) \to (0,0)$. Sendo assim, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Portanto, como

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^4+3k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

concluímos que f é diferenciável no ponto $(0,1)$.

$\heartsuit$

Exemplo 6.8.2: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{3x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua no ponto $(0,0)$.
(b) Verifique se f é possui derivadas parciais no ponto $(0,0)$.
(c) Verifique se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Solução:
a) Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3y}{3x^2+2y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2}{3x^2+2y^2}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$0 \leq \frac{x^2}{3x^2+2y^2} \leq \frac{3x^2}{3x^2+2y^2} \leq \frac{3x^2+2y^2}{3x^2+2y^2} = 1.$$

Portanto, $\dfrac{x^2}{3x^2+2y^2}$ é uma função limitada. Desta forma, como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$, o limite acima é o limite do produto de uma função limitada por outra que tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Sendo assim, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Concluímos portanto, que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2}{3x^2+2y^2} \\
&= 0 \\
&= f(0,0),
\end{aligned}$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$.

b) Lembre-se que as derivadas parciais no ponto $(0,0)$ devem se calculadas pela definição, pois estamos diante do caso de funções definidas por sentenças. Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz das derivadas parciais de f o ponto $(0,0)$ existe e é igual a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)\right) = \left(\begin{array}{cc}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\end{array}\right) = (0\ \ 0)$.

c) Devemos agora calcular $\lim_{||(h,k)||\to 0}\frac{erro(h,k)}{||h,k||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, onde

$$\begin{aligned}erro(h,k) &= f(0+h,k)-f(0,0)-(0\ \ 0)\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}\\ &= \frac{h^3k}{3h^2+2k^2}.\end{aligned}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3k}{3h^2+2k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3k}{(3h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} h\,\frac{h^2}{(3h^2+2k^2)}\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

De fato, para verificar que $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, observe que

$$0 \le \frac{h^2}{(3h^2+2k^2)} \le \frac{3^2}{(3h^2+2k^2)} \le \frac{3h^2+2k^2}{(2h^2+2k^2)} = 1$$

e

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\ &\le \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 1.\end{aligned}$$

Portanto, verificamos que $\dfrac{h^2}{(3h^2+2k^2)}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são funções limitadas. Desta forma, como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} h = 0$, o limite acima é o limite do produto de funções limitadas por outra que tende a zero quando $(h,k) \to (0,0)$. Sendo assim, pelo Teorema do Anulamento, temos que este limite é zero. Portanto, como

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{erro(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3k}{(3h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

concluímos que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

$\heartsuit$